Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Daniel Skodlerack

Probeklausur – Algebra/Zahlentheorie und ihre Didaktik (Fachwissenschaftlicher Teil), SoSe 2017

Konvention: Ring beinhaltet die Kommutativität. Ein unitärer Ring beinhaltet immer die Forderung $0 \neq 1$.

Aufgabe 1

1. Formulieren Sie die Peano-Axiome.
2. Zeigen Sie mit Hilfe der Peano-Axiome, dass für alle Elemente $n, m \in \mathbb{N}_0$ aus $nm = 1$ folgt, dass n und m gleich eins sind.
3. Zeigen Sie die folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Systems von Kongruenzen:

$$x \equiv_3 1, \quad x \equiv_5 3, \quad x \equiv_{11} 2.$$

2. Berechnen Sie eine ganze Zahl x, für die $95x \equiv 38 \bmod 209$ gilt.

Aufgabe 3

1. Es seien $(G_1, \cdot), (G_2, \circ)$ Gruppen. Wir definieren

$$(g_1, g_2) \star (h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \circ h_2) \quad \forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2.$$

   Zeigen Sie, dass $(G_1 \times G_2, \star)$ wieder eine Gruppe ist. Man bezeichnet diese Gruppe mit $(G_1, \cdot) \times (G_2, \circ)$.

2. Finden Sie eine Untergruppe $H \leq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, die kein Produkt von Untergruppen ist, d.h. für die keine Untergruppen $H_1 \leq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ und $H_2 \leq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ existieren, so dass $H = (H_1, +) \times (H_2, +)$.

Aufgabe 4

1. Definieren Sie den Begriff der zyklischen Gruppe. (Sie dürfen dabei den Begriff der Gruppe als bekannt voraussetzen.)
2. Nennen Sie je ein Beispiel für eine zyklische Gruppe und eine nicht-zyklische Gruppe (ohne Beweis).
3. Es sei $G = \langle g \rangle$ zyklisch. Zeigen Sie $\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(g)$.

Aufgabe 5

1. Wir betrachten auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Verknüpfungen

$$\begin{array}{rrcl} \oplus\colon & (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \text{und} \\ & (z_1, z_2), (w_1, w_2) & \longmapsto & (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ \otimes\colon & (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ & (z_1, z_2), (w_1, w_2) & \longmapsto & (z_1 \cdot w_1, w_2 + z_2) \end{array}$$

   Prüfen Sie, ob $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ ein Ring ist.

2. Es seien $(R, +_R, \cdot_R)$ und $(S, +_S, \cdot_S)$ unitäre Ringe und $\phi\colon R \to S$ ein unitärer Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

   a) Ist $I \subset S$ ein Ideal, dann ist auch $\phi^{-1}(I) \subset R$ ein Ideal.

   b) Ist $J \subset S$ ein Primideal, dann ist auch $\phi^{-1}(J) \subset R$ ein Primideal.

   c) Finden Sie ein Beispiel für S, R und ϕ und ein Ideal I von R, so dass $\phi(I)$ kein Ideal von S ist.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Kongruenzen lösbar sind:

1. $X^2 \equiv 3333 \mod 83$

2. $5X^2 \equiv 21 \mod 29$

3. $X^2 + 6X \equiv 96 \mod 131$.