

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik Serie 11*

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **Montag den 10.07.2017 vor** dem Beginn der Vorlesung.

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Sie dürfen in den ersten beiden Aufgaben Ihre Analysiskenntnisse über Folgen, Cauchyfolgen und Grenzwertberechnungen verwenden.

Aufgabe 1. (5*+5* Punkte)(Dedekindsche Schnitte) Betrachten Sie die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus der Vorlesung als Körper $\text{CF}(\mathbb{Q})/\text{NF}(\mathbb{Q})$, wobei $\text{CF}(\mathbb{Q})$ der Ring der Cauchyfolgen und $\text{NF}(\mathbb{Q})$ das Ideal der Nullfolgen in $\mathbb{Q}$ ist. In der Vorlesung hatten wir folgende Abbildung angegeben:

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Ded}(\mathbb{Q}), \quad \Phi(r) := (A_r, B_r),$$

wobei A_r und B_r für $r = [(a_n)]_{\text{NF}(\mathbb{Q})}$ wie folgt definiert wurden:

$$A_r := \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists \epsilon \in \mathbb{Q}^{>0} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x < a_n - \epsilon\}, \quad B_r := \mathbb{Q} \setminus A_r.$$

1. Zeigen Sie, dass Φ wohldefiniert ist, d.h. $\Phi(r)$ nicht vom Repräsentanten $(a_n)_{\mathbb{N}}$ abhängt und (A_r, B_r) ein Dedekindscher Schnitt ist.
2. Zeigen Sie, dass Φ additiv ist.

Aufgabe 2. (5*+5* Punkte)(Kettenbrüche) Betrachten Sie die Folge:

$$a_n := b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_n}}}}, \quad b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } 2|n \\ 2 & \text{falls } 2 \nmid n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

1. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist. Hinweis: $a_{n+2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{a_n}}$, und betrachten Sie $a_{n+2} - a_{n+1}$.
2. Berechnen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$.

Bemerkung: Es sei erwähnt, dass $[(a_n)_{\mathbb{N}}]_{\text{NF}(\mathbb{Q})} \in \mathbb{R} = \text{CF}(\mathbb{Q})/\text{NF}(\mathbb{Q})$ der Grenzwert von $(a_n)_{\mathbb{N}_0}$ ist. Dieser soll nun als Term mit Hilfe von rationalen Zahlen und Quadratwurzeln angegeben werden.

Aufgabe 3. (5*+5* Punkte)(quadratische Reste)

1. Finden Sie alle Primzahlen kleiner als 20, die quadratischer Rest modulo 101 sind.
2. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass die Gleichung $101^n X^3 + 7X^2 = 33Y^2$ keine ganzzahlige Lösung ungleich $(0, 0)$ besitzt.

Hinweis: Führen Sie den Beweis auf den Fall zurück, bei dem weder x noch y durch 101 teilbar sind. Dabei kann es passieren, dass man zu einer Gleichung mit „größerem n “ übergeht.