

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik Serie 10

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **Montag den 03.07.2017** vor dem Beginn der Vorlesung.

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Ab jetzt beinhaltet „unitärer Ring“, bzw. „Ring mit Eins“, immer die Forderung $1 \neq 0$.

Aufgabe 1. (5+5 Punkte)(Grad eines Polynoms) Es sei R ein unitärer Ring.

1. Zeigen Sie, dass für je zwei Elemente $P, Q \in R[X]$ die Ungleichung

$$\deg(PQ) \leq \deg(P) + \deg(Q) \quad (1)$$

gilt. Geben Sie ein Beispiel für R an, in dem in (1) für geeignete P und Q eine echte Ungleichung steht. Zeigen Sie, dass für alle Paare (P, Q) in (1) die Gleichheit gilt, falls R ein Integritätsbereich ist.

2. Gegeben seien $P, Q \in R[X]$, so dass der Leitkoeffizient von Q eine Einheit von R ist. Zeigen Sie, dass Polynome $S, T \in R[X]$ existieren, so dass der Grad von T kleiner als der Grad von Q ist und $P = QS + T$ gilt. Zeigen Sie, dass diese Darstellung eindeutig ist, also für Polynome $S', T' \in R[X]$, wobei T' einen kleineren Grad als Q hat, aus der Gleichung $P = QS' + T'$ die Gleichungen $S = S'$ und $T = T'$ folgen.

Aufgabe 2. (5+5*+5)(Primfaktorzerlegung)

1. Zeigen Sie, dass das Ideal $(X - 3, 21)_{\mathbb{Z}[X]}$ kein Primideal von $\mathbb{Z}[X]$ ist.
- 2.* Es seien R ein unitärer Ring und a ein Element aus $R \setminus (R^\times \cup \{0\})$. Zeigen Sie, dass Ra genau dann ein Primideal von R ist, wenn a ein Primelement von R ist.
3. Finden Sie in $\mathbb{Q}[X]$ die Primfaktorzerlegung des folgenden Polynoms

$$X^5 - 2X^4 - 25X + 50,$$

wobei jeder Primfaktor normiert sein soll. (Ein Polynom heißt normiert, wenn der Leitkoeffizient gleich 1 ist.) Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass die gefundenen Polynome auch Primelemente von $\mathbb{Q}[X]$ sind.

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)(Nullteiler)

1. Finden Sie alle Nullteiler von $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Es sei m eine natürliche Zahl größer als 1. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullteiler von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ übereinstimmt.
2. Finden Sie einen unendlichen unitären Ring, in dem jedes Element ungleich Eins ein Nullteiler ist.

Aufgabe 4. (5+5* Punkte)(Primelemente und irreduzible Elemente)

1. Es sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass jedes Primelement von R irreduzibel ist.
- 2.* Es sei $P = \sum_{i=0}^l a_i X^i$ ein normiertes Polynom in X mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass P genau dann ein Primelement von $\mathbb{Z}[X]$ ist, wenn es ein Primelement von $\mathbb{Q}[X]$ ist.