Musterlösung zur Serie 7
Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik

Dr. Daniel Skodlerack

18. Juni 2017

In dieser Serie fixieren wir eine natürliche Zahl n größer gleich 2.

Aufgabe 1. (5*+5*)(Signumfunktion) In der Vorlesung haben wir die Signumfunktion $\operatorname{sgn}: \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ mit Hilfe der Zykelzerlegungen definiert.

1.* Zeigen Sie, dass sgn ein Gruppenhomomorphismus ist, wobei wir auf $\{\pm 1\}$ die Multiplikation aus $\mathbb{Z}$ betrachten.

2.* Zeigen sie, dass für jede Permutation σ auf $\mathbb{N}^{\leq n}$ die Gleichung $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung f, die eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ auf $(-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)}$ abbildet, ein Gruppenhomomorphismus ist, und dass f und sgn auf allen Transpositionen übereinstimmen.

Lösung:

1. Jede Permutation von $\mathbb{N}^{\leq n}$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben (das leere Produkt mit eingeschlossen), da jede Permutation eine Zykelzerlegung besitzt und jeder Zykel $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_l)$ die Gleichung:
$$(a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_l) = (a_1\ a_2) \circ (a_2\ a_3) \circ \ldots \circ (a_{l-1}\ a_l)$$
erfüllt. Es reicht für alle Permutationen σ und Transpositionen ρ die Gleichung
$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho) \tag{1}$$
zu zeigen, denn daraus folgt die Homomorphismuseigenschaft wie die folgende Rechnung zeigt:
$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma') &= \operatorname{sgn}(\prod_i \rho_i \circ \prod_j \rho'_j) \\
&= \prod_i \operatorname{sgn}(\rho_i) \prod_j \operatorname{sgn}(\rho'_j) \\
&= \operatorname{sgn}(\prod_i \rho_i)\operatorname{sgn}(\prod_j \rho'_j) \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma').
\end{aligned}$$
wobei die Permutationen σ und σ' mit Transpositionen ρ_i und ρ'_j dargestellt wurden. Für die zweite und die dritte Gleichheit wurde (1) iterativ verwendet. Wir zeigen jetzt Gleichung (1). Es sei $\sigma = \prod_i \tau_i$ eine Zykelzerlegung von σ. Wir haben drei Fälle:

   (a) $\operatorname{Fix}(\sigma) \supseteq \operatorname{Bahn}(\rho)$: In diesem Fall erhalten wir die Zykelzerlegung $\sigma \circ \rho = (\prod_i \tau_i) \circ \rho$. Also ist
   $$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho) = (\prod_i \operatorname{sgn}(\tau_i))\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho).$$

   (b) $|\operatorname{Fix}(\sigma) \cap \operatorname{Bahn}(\rho)| = 1$: Es sei a das Element des Schnittes. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei a ein Element der Bahn von τ_1. Dann ist $\tau_1 \circ \rho$ ein Zykel, dessen Bahn genau ein

Element mehr hat als die Bahn von τ_1, genauer: $\mathrm{Bahn}(\tau_1 \circ \rho) = \mathrm{Bahn}(\tau_1) \cup \{a, b\}$, und zu den Bahnen der τ_i mit Index $i \geq 2$ disjunkt ist. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}(\sigma \circ \rho) &= (\prod_{i \geq 2} \mathrm{sgn}(\tau_i))\mathrm{sgn}(\tau_1 \circ \rho) \\
&= (\prod_{i \geq 2} \mathrm{sgn}(\tau_i))(-1)^{|\mathrm{Bahn}(\tau_1)|+1-1} \\
&= (\prod_{i \geq 2} \mathrm{sgn}(\tau_i))(-1)^{|\mathrm{Bahn}(\tau_1)|-1}(-1) \\
&= (\prod_{i \geq 2} \mathrm{sgn}(\tau_i))\mathrm{sgn}(\tau_1)(-1) \\
&= (\prod_{i \geq 2} \mathrm{sgn}(\tau_i))\mathrm{sgn}(\tau_1)\mathrm{sgn}(\rho) \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\rho).
\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{Fix}(\sigma) \cap \mathrm{Bahn}(\rho) = \emptyset$: Ohne Einschränkung sei die Bahn von ρ eine Teilmenge der Vereinigung der Bahnen von τ_1 und τ_2 und a ein Element der Bahn von τ_1. Im Fall, dass die Bahn von ρ mit beiden Bahnen einen nichtleeren Schnitt hat, ist $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \rho$ ein Zykel, dessen Bahn die Vereinigung der Bahnen von τ_1 und τ_2 ist. Eine Rechnung wie in (1b) zeigt nun (1). Wir betrachten nun den Fall, dass die Bahn von ρ in der Bahn von τ_1 enthalten ist. Dann ist entweder $\tau_1 \circ \rho = \mathrm{id}$, falls $\tau_1 = \rho$, oder ein Zykel mit einer um Eins kleineren Bahn, falls $\tau_1(a) = \rho(a) = b$ und $\tau_1 \neq \rho$ bzw. mit vertauschten Rollen von a und b, oder ein Produkt von zwei disjunkten Zykeln dessen Bahnen sich zur Bahn von τ_1 vereinen, falls $\tau_1(a) \neq b$ und $\tau_1(b) \neq a$. In jedem der Fälle gilt $\mathrm{sgn}(\tau_1 \circ \rho) = \mathrm{sgn}(\tau_1)\mathrm{sgn}(\rho)$, und eine Rechnung, wie in (1b) zeigt (1).

2. Wir betrachten die Abbildung f aus dem Hinweis. Es gilt für alle Permutationen σ von $\mathfrak{S}_n$ die Gleichung:

$$f(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i},$$

und deshalb für zwei Permutationen σ, σ':

$$\begin{aligned}
f(\sigma \circ \sigma') &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{j - i} \\
&= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \prod_{i<j} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\
&= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \prod_{i<j} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\
&= f(\sigma)f(\sigma'),
\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit daraus folgt, dass $\{\sigma'(i), \sigma'(j)\}$ jede zweielementige Menge genau einmal passiert, wenn $\{i, j\}$ alle zweielementigen Mengen passiert. Die Abbildung f ist also ein Gruppenhomomorphismus und für eine Transposition $\rho = (a\ b)$, $a < b$, gilt $f(\rho) = (-1)$, da ρ genau die Inversionen (Fehlstände)

$$(a, j), a < j \leq b, (i, b), a < i < b,$$

hat, also $2(b - a) - 1$ an der Zahl. Da die Transpositionen die symmetrische Gruppe vom Grad n erzeugen und beide Homomorphismen f und sgn auf der Menge dieser übereinstimmen, müssen beide Abbildungen gleich sein.

Aufgabe 2. (5*+5*)(Alternierende Gruppe vom Grad n) Wir betrachten in dieser Aufgabe die alternierende Gruppe A_n. Sie ist per Definition und Aufgabe 1.2. der Kern der Signumfunktion, und damit eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$.

1.* Zeigen Sie, dass A_n durch die Menge der 3-Zykel von $\mathfrak{S}_n$ erzeugt wird.

2.* Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_n$ genau eine Untergruppe vom Index 2 hat.

Lösung:

1. Alle 3-Zykel sind gerade Permutationen und deshalb ist die durch sie erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ eine Teilmenge von A_n. Wir zeigen nun die andere Inklusion. Jedes Element von $\mathfrak{S}_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen. Deshalb ist die Gruppe A_n als Kern von der Signumfunktion die Menge aller Elemente von $\mathfrak{S}_n$, die sich als Produkt von einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben lassen. Es reicht deshalb zu zeigen, dass die Verknüpfung zweier ungleicher Transpositionen $\rho = (ab)$ und $\rho' = (cd)$ als Produkt von 3-Zykeln dargestellt werden kann. Wenn beide Transpositionen nicht-disjunkte Bahnen haben, etwa $a = c$ und $b \neq d$ $(\rho \neq \rho')$, dann gilt
$$(ab) \circ (ad) = (bad).$$
Wenn beide Transpositionen disjunkte Bahnen haben, dann gilt:
$$(ab) \circ (cd) = (abc) \circ (bcd).$$
Damit ist das Gewünschte gezeigt.

2. Die Gruppe A_n ist eine Untergruppe vom Index 2, da nach dem 1. Isomorphiesatz für sgn die Isomorphie $\mathfrak{S}_n/A_n \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$ gilt. Es sei H eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ vom Index 2. Dann ist nach der vorhergehenden Serie (Aufgabe 2) H ein Normalteiler von $\mathfrak{S}_n$, also $\mathfrak{S}_n/H$ mit der kanonisch definierten Struktur eine Gruppe. Es sei σ ein 3-Zykel. Dann gilt
$$[\sigma^{-1}]_H = [\sigma^2]_H = [\sigma]_H^2 = [\mathrm{id}]_H$$
nach dem Satz von Euler. Also folgt somit, dass σ^{-1} und σ Elemente von H sind. Da σ beliebig gewählt wurde, ist A_n eine Teilmenge von H. Da zusätzlich H und A_n, wegen des gleichen Indexes in der endlichen Gruppe $\mathfrak{S}_n$, die gleiche Ordnung haben, müssen beide Gruppen übereinstimmen.

Aufgabe 3. (3*+2*)(Normalteiler von direkten Produkten von Gruppen)

1.* Es seien G und G' Gruppen und $H \leq G$ und $H' \leq G'$ Untergruppen von G bzw. G'. Zeigen Sie, dass $H \times H'$ genau dann ein Normalteiler von $G \times G'$ ist, wenn H ein Normalteiler von G und H' ein Normalteiler von G' ist.

2.* Finden Sie ein Beispiel für zwei Gruppen G und G', so dass $G \times G'$ einen Normalteiler N besitzt, so dass für kein Paar (H, H'), bestehend aus $H \leq G$ und $H' \leq G'$, die Menge N mit $H \times H'$ übereinstimmt.

Lösung:

1.
$$\begin{aligned}
H \times H' \trianglelefteq G \times G' \quad &\Leftrightarrow \quad \forall_{(g,g') \in G \times G'} \forall_{(h,h') \in H \times H'} : (g, g')(h, h')(g, g')^{-1} \in H \times H' \\
&\Leftrightarrow \quad \forall_{(g,g') \in G \times G'} \forall_{(h,h') \in H \times H'} : (ghg^{-1}, g'h'g'^{-1}) \in H \times H' \\
&\Leftrightarrow \quad \forall_{(g,g') \in G \times G'} \forall_{(h,h') \in H \times H'} : ghg^{-1} \in H \wedge\ g'h'g'^{-1} \in H' \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall_{g \in G} : gHg^{-1} \subseteq H) \wedge\ (\forall_{g' \in G'} : g'H'g'^{-1} \subseteq H') \\
&\Leftrightarrow \quad H \trianglelefteq G \wedge\ H' \trianglelefteq G'.
\end{aligned}$$

2. Wir wählen $G = G' = (\{\pm 1\}, \cdot)$. Die Menge $N := \{(1, 1), (-1, -1)\}$ ist eine Untergruppe von $G \times G$ vom Index 2, und wenn sie gleich dem Produkt $H \times H'$ für geeignete Untergruppen H, H' von G wäre, dann müsste aufgrund der Kardinalität eine der Gruppen H, H' trivial sein und die andere mit G übereinstimmen. Es ist aber N ungleich $G \times \{1\}$ und $\{1\} \times G$. Also ist N nicht von der obigen Form. Damit ist das Gewünschte gezeigt.

*-Aufgaben sind Bonusaufgaben.