Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik
Serie 9

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **Montag den 26.06.2017 vor** dem Beginn der Vorlesung.

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Aufgabe 1. (10 Punkte)(Matrizenringe und Endomorphismen) Es seien R ein kommutativer unitärer Ring und n eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass der Matrizenring $\mathrm{M}_n(R)$ isomorph zum Ring $\mathrm{End}_R(R^n)$ der R-linearen Endomorphismen von R^n ist.

Ab jetzt lassen wir in den Übungsserien bei Ringen das Attribut „kommutativ“ weg, da alle von jetzt an betrachteten Ringe kommutativ sind.

Aufgabe 2. (5+5+5* Punkte)(Ideale von $\mathfrak{P}(M)$) Es seien M eine Menge und N eine Teilmenge von M.

1. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass $\mathfrak{P}(N)$ ein Ideal von $(\mathfrak{P}(M), \Delta, \cap)$ ist. Zeigen Sie, dass der Faktorring $\mathfrak{P}(M)/\mathfrak{P}(N)$ isomorph zum Ring $(\mathfrak{P}(M \setminus N), \Delta, \cap)$ ist.
2. Es sei M endlich. Zeigen Sie, dass alle Ideale von $\mathfrak{P}(M)$ von der Form $\mathfrak{P}(S),\ S \subseteq M$, sind.
3. Es sei M unendlich. Zeigen Sie, dass in $\mathfrak{P}(M)$ ein Ideal existiert, welches nicht die Potenzmenge einer Teilmenge von M ist.

Aufgabe 3. (5+5+5* Punkte)(Primideale)

1. Zeigen Sie, dass das Ideal $I := (X+2)_{\mathbb{Z}[X]}$ ein Primideal von $\mathbb{Z}[X]$ ist, und beweisen bzw. widerlegen Sie die Aussage, dass I ein Maximalideal von $\mathbb{Z}[X]$ ist.
2. Ist $(X+2)_{\mathbb{Q}[X]}$ ein Maximalideal von $\mathbb{Q}[X]$? Beweisen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie, dass jeder unitäre Ring, der $0_R \neq 1_R$ erfüllt, ein Maximalideal enthält.

Aufgabe 4. ((5+5)+5* Punkte)(Chinesischer Restsatz)

1. Es sei R ein Ring, und es seien zwei Ideale I und J von R gegeben.
   (a) Zeigen Sie, dass die *Idealsumme*
   $$I + J := \{x + y|\ x \in I \wedge y \in J\}$$
   und das *Idealprodukt*
   $$I \cdot_{Id} J := \{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ly_l|\ l \in \mathbb{N} \wedge (\forall_{i \in \mathbb{N}^{\leq l}} :\ x_i \in I \wedge y_i \in J)\}$$
   Ideale von R sind.
   (b) Es sei R nun zusätzlich unitär, und wir setzen $I + J = R$ voraus. Zeigen Sie, dass $I \cdot_{Id} J$ und $I \cap J$ übereinstimmen.
2. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5X + 6)_{\mathbb{Z}[X]}$ ringisomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.