

Musterlösung zur Serie 6

Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik

Dr. Daniel Skodlerack

13. Juni 2017

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte). (Homomorphismen)

1. Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ an.
2. Es seien m und n teilerfremde ganze Zahlen ungleich 0. Zeigen Sie, dass es nur einen Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ gibt.
3. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ gruppenisomorph zu $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\}, \cdot)$ ist. Sie können dabei verwenden, dass $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\}, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Lösung:

1. Ein Gruppenhomomorphismus f von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, ist aufgrund von

$$f([z]_4) = f(z[1]_4) = zf([1]_4)$$

durch seinen Wert in $[1]_4$ vollständig festgelegt. Es kann also höchstens 4 Endomorphismen von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ geben. Die Abbildungen $f_a \in \text{Abb}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, $f_a([z]_4) := [z]_4[a]_4 = [za]_4$, $a \in \mathbb{N}^{\leq 4}$, sind auch Homomorphismen, denn

$$f_a([z]_4 + [z']_4) = f_a([z + z']_4) = [a(z + z')]_4 = [az]_4 + [az']_4 = f_a([z]_4) + f_a([z']_4),$$

für alle ganzen Zahlen z und z' . Folglich sind die Abbildungen f_a , $a \in \mathbb{N}^{\leq 4}$, die gesuchten Homomorphismen.

2. Erst einmal existiert der Nullhomomorphismus, $f_{\text{null}}([z]_n) := [0]_m$. Es sei nun f ein Homomorphismus von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$. Nach dem Lemma von Bézout existieren ganze Zahlen a und b , so dass $an + bm = 1$, und es gilt

$$f([z]_n) = f([z(an + bm)]_n) = f([zbm]_n) = f(m[zb]_n) = mf([zb]_n) = [0]_m.$$

Somit ist f der Nullhomomorphismus.

3. Die Gruppe $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\}, \cdot)$ wird von $[3]_7$ erzeugt und ist somit zyklisch. Nach Satz 62 gibt es eine natürliche Zahl m so dass $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\}$ gruppenisomorph zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist. Es ist m die Ordnung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und somit die Ordnung von $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{[0]_7\}$, also gleich 6.

Aufgabe 2 (5+5+5* Punkte). (Normalteiler) Es seien eine Gruppe G und eine Untergruppe H von G gegeben.

1. Wir nehmen an, dass H in G den Index 2 hat.
 - (a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.
 - (b) Finden Sie einen Gruppenepimorphismus von G nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{N \subseteq H \mid N \trianglelefteq G\}$$

bezüglich „ $\subseteq$ “ ein größtes Element besitzt.

Lösung:

1. (a) Sowohl die Menge der Rechtsnebenklassen von H als auch die Menge der Linksnebenklassen von H sind Partitionen von G mit jeweils genau zwei Elementen, da $(G : H) = 2$. Beide Partitionen enthalten das Element H , und, da beide Partitionen genau zwei Elemente besitzen, stimmen beide Partitionen mit der Menge $\{H, G \setminus H\}$ überein. Also gilt für jedes $g \in G$ im Fall $g \in H$: $gH = H = Hg$ und im Fall $g \notin H$: $gH = G \setminus H = Hg$. Im letzteren Fall folgen die Gleichungen, weil die paarweisen Schnitte nichtleer sind und wir eine einzige Partition von G betrachten. Also folgt für alle $g \in G$:

$$gHg^{-1} = Hgg^{-1} = H.$$

- (b) Es ist G/H eine Gruppe, da H ein Normalteiler von G ist, siehe Lemma 51. Wir betrachten die kanonische Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$, $\pi(g) := gH$. Diese ist ein Gruppenhomomorphismus nach der Definition der Struktur auf G/H , und per Definition surjektiv. Die Gruppe G/H hat Ordnung 2 und ist daher zyklisch und nach Satz 62 isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, etwa via ϕ . Damit ist $f := \phi \circ \pi$ ein Gruppenepimorphismus von G nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Man kann f genau angeben, denn ϕ muss $[e_G]_H$ auf $[0]_2$ abbilden und ist bijektiv, da ϕ ein Gruppenisomorphismus ist. Damit gilt $f(g) = [0]_2$, falls $g \in H$, und $f(g) = [1]_2$, falls $g \in G \setminus H$.
2. Wir definieren $N_0 := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Dann gilt für jedes Element g von G , dass gN_0g^{-1} eine Teilmenge von N_0 ist. Also ist N_0 ein Normalteiler von G . Es ist auch N_0 eine Teilmenge von H , da H am Schnitt beteiligt ist. Es sei nun $N \leq H$ ein Normalteiler von G . Dann gilt

$$N = \bigcap_{g \in G} gNg^{-1} \subseteq \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = N_0,$$

wobei die erste Gleichheit aus der Normalteilereigenschaft von N folgt. Also ist N_0 der größte Normalteiler von G , der eine Teilmenge von H ist.

Aufgabe 3 (4+2+4 Punkte). (Dritter Isomorphiesatz) Es seien eine Gruppe G , eine Untergruppe H und ein Normalteiler N von G gegeben.

1. Zeigen Sie, dass $NH = \{nh \mid n \in N \wedge h \in H\}$ eine Untergruppe von G ist, und dass $NH = HN$ gilt.
2. Zeigen Sie $(H \cap N) \trianglelefteq H$ und $N \trianglelefteq HN$.
3. Zeigen Sie, dass $H/(H \cap N)$ gruppenisomorph zu HN/N ist.

Bitte wenden.

Lösung:

1. Erst einmal enthält NH das neutrale Element und ist deshalb nichtleer. Für zwei Elemente $nh, n'h$ von NH gilt:

$$nh(n'h)^{-1} = nhh'^{-1}n'^{-1} = n(hh'^{-1})n'^{-1}(hh'^{-1})^{-1}(hh'^{-1}) \in NH,$$

denn $(hh'^{-1})n'^{-1}(hh'^{-1})^{-1}$ ist ein Element von N , da $N \trianglelefteq G$. Aus dem Untergruppenkriterium folgt, dass NH eine Untergruppe von G ist.

Des Weiteren gilt für Elemente $n \in N$ und $h \in H$ auch $nh = h(h^{-1}nh) \in HN$, und analog $hn \in NH$. Daraus folgt $NH = HN$.

2. $H \cap N$ ist nach dem Untergruppenkriterium eine Untergruppe von G , d.h. $(H \cap N, *|_{(H \cap N) \times (H \cap N)})$ ist eine Gruppe. Somit ist $H \cap N$ eine Untergruppe von H . Für beliebige Elemente $x \in N \cap H$, $h \in H$ gelten $h x h^{-1} \in H$, da $H \leq G$, und $h x h^{-1} \in N$, da $N \trianglelefteq G$. Folglich gilt für beliebige $h \in H$: $h(N \cap H)h^{-1} \subseteq H \cap N$, und somit ist $H \cap N$ ein Normalteiler von H .

Zur zweiten Aussage: N ist eine Untergruppe von HN , da es eine Untergruppe von G und eine Teilmenge von HN ist und HN eine Untergruppe von G ist. Für Elemente $g \in HN$ gilt $gNg^{-1} = N$, da $N \trianglelefteq G$. Also gilt $N \trianglelefteq HN$.

3. Aus 3.2 folgt, dass $H/(H \cap N)$ und HN/N Gruppen sind. Die Abbildung $f : H \rightarrow HN/N$, definiert durch $f(h) := [h]_N$, ist ein Homomorphismus, da es die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G/N$ ist. Die Abbildung f ist surjektiv, da für alle $h \in H$ und $n \in N$ die Gleichung

$$[hn]_N = hnN = hN = [h]_N$$

gilt. Wir berechnen den Kern von f . Ein Element h von H ist im Kern von f genau dann, wenn $[h]_N = [e]_N$ genau dann, wenn $hN = N$ genau dann, wenn $h \in N$. Also ist der Kern von f der Schnitt von H mit N . Die gewünschte Isomorphie folgt nun aus dem 1. Isomorphiesatz.

Aufgabe 4 ((2+2+2)+4 Punkte). (Lamplighter-Gruppe)

1. Es sei $((M_i, *_i))_{i \in I}$ eine Familie von Monoiden. Wir betrachten dessen direktes Produkt $\prod_{i \in I} M_i = (\times_{i \in I} M_i, *)$. Es sei e_i das neutrale Element von M_i .

(a) Zeigen Sie, dass

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i, |\{i \in I \mid x_i \neq e_i\}| < \infty \right\}$$

abgeschlossen unter $*$ ist, d.h. $*((\bigoplus_{i \in I} M_i) \times (\bigoplus_{i \in I} M_i)) \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$. Man nennt $\bigoplus_{i \in I} M_i$ die *äußere direkte Summe* von $((M_i, *_i))_{i \in I}$.

(b) Folgern Sie, dass $\bigoplus_{i \in I} M_i$ mit der Einschränkung von $*$ einen Monoid bildet.

(c) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i \in I} M_i$ eine Untergruppe von $\prod_{i \in I} M_i$ ist, wenn jedes $(M_i, *_i)$ eine Gruppe ist.

2. Wir betrachten die folgende Menge $G := \mathbb{Z} \times (\bigoplus_{z \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass G mit der Struktur

$$(z, (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) * (z', (a'_i)_{i \in \mathbb{Z}}) := (z + z', (a_i +_{2\mathbb{Z}} a'_i)_{i \in \mathbb{Z}})$$

eine Gruppe bildet, und zeigen Sie, dass $(1, ([0]_2)_{i \in \mathbb{Z}})$ und $(0, (l_i)_{i \in \mathbb{Z}})$ mit

$$l_i := \begin{cases} [1]_2 & , i = 0 \\ [0]_2 & , i \neq 0 \end{cases}$$

die Gruppe erzeugen.

Lösung:

1. (a) Für ein beliebiges Element $x = (x_i)_{i \in I}$ von $\times_{i \in I} M_i$ sei I_x die Menge aller Indizes $i \in I$, für die $x_i \neq e_i$ gilt. Für zwei beliebige Elemente $x, y \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ sind die Mengen I_x und I_y endlich und somit ist $I_x \cup I_y$ endlich, und außerhalb $I_x \cup I_y$ gilt

$$x_i * y_i = e_i * e_i = e_i.$$

Damit ist I_{x*y} eine Teilmenge von $I_x \cup I_y$, und deshalb endlich. Also ist $x * y$ ein Element von $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

- (b) Nach 4.1 ist $(\bigoplus_{i \in I} M_i, *)$ ein Magma. Die Struktur ist assoziativ, weil $\prod_{i \in I} M_i$ ein Monoid, und insbesondere eine Halbgruppe, ist. Das neutrale Element von $\prod_{i \in I} M_i$ ist $e = (e_i)_i$. Die Menge I_e ist leer, also endlich, und e liegt somit in $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Damit ist gezeigt, dass $(\bigoplus_{i \in I} M_i, *)$ ein Monoid ist.

- (c) Aus 4.2 wissen wir schon, dass $(\bigoplus_i M_i, *)$ ein Monoid ist. Wir müssen nur noch zeigen, dass jedes Element von $\bigoplus_i M_i$ bezüglich $*$ invertierbar ist. Es sei x ein Element von $\bigoplus_i M_i$. Das Element x_i von M_i besitzt eine Inverse x_i^{-1} bezüglich $*_i$, da $(M_i, *_i)$ eine Gruppe ist. Aus der Definition von $*$ folgt, dass $y := (x_i^{-1})_i$ zu x invers ist. Es gilt $y_i \neq e_i$ genau dann, wenn $x_i \neq e_i^{-1} = e_i$, und deshalb sind die Mengen I_x und I_y gleich. Die Menge I_y ist also endlich, da I_x endlich ist, und somit ist y ein Element von $\bigoplus_i M_i$. Da x beliebig gewählt wurde, ist $(\bigoplus_i M_i, *)$ eine Gruppe.

2. Es gilt für $(z, a), (z', a'), (z'', a'') \in G$:

$$((z, a) * (z', a')) * (z'', a'') = ((z + z') + z'', b) \wedge (z, a) * ((z', a') * (z'', a'')) = (z + (z' + z''), c),$$

mit den Gleichungen $b_i = (a_{(i+z'')+z'} + a'_{i+z''}) + a''_i$ und $c_i = a_{i+(z'+z'')} + (a'_{i+z''} + a''_i)$. Die Assoziativität der Addition in $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ergibt somit die Assoziativität von $*$. Das Element $(0, ([0]_2)_{i \in \mathbb{Z}})$ ist das neutrale Element bezüglich $*$, wie man durch Einsetzen in die Definition von $*$ direkt sieht. Genauso leicht erkennt man, dass $(-z, (-a_{i-z})_{i \in \mathbb{Z}})$ die Inverse von (z, a) ist. Also ist G eine Gruppe. Es sei I_a die endliche Teilmenge der ganzen Zahlen $i \in \mathbb{Z}$, für die $a_i \neq [0]_2$ gilt. Dann gilt

$$(z, a) = (z, ([0]_2)_{i \in \mathbb{Z}}) * (0, a) = (1, ([0]_2)_{i \in \mathbb{Z}})^z * \prod_{j \in I_a} ((0, (l_i)_{i \in \mathbb{Z}}) * (1, ([0]_2)_{i \in \mathbb{Z}})^{-j}),$$

wobei mit $()^k$, $k \in \mathbb{Z}$, die k -te Potenz bezüglich $*$ gemeint ist. Es folgt, dass die Elemente $(1, ([0]_2)_{i \in \mathbb{Z}})$ und $(0, (l_i)_{i \in \mathbb{Z}})$ die Gruppe G erzeugen.