Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik
Serie 7

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **Montag den 12.06.2017 vor** dem Beginn der Vorlesung.

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

In dieser Serie fixieren wir eine natürliche Zahl n größer gleich 2.

Aufgabe 1. (5*+5*)(Signumfunktion) In der Vorlesung haben wir die Signumfunktion $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ mit Hilfe der Zykelzerlegungen definiert.

1.* Zeigen Sie, dass sgn ein Gruppenhomomorphismus ist, wobei wir auf $\{\pm 1\}$ die Multiplikation aus $\mathbb{Z}$ betrachten.

2.* Zeigen sie, dass für jede Permutation σ auf $\mathbb{N}^{\leq n}$ die Gleichung $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)}$ gilt.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung f, die eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ auf $(-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)}$ abbildet, ein Gruppenhomomorphismus ist, und dass f und sgn auf allen Transpositionen übereinstimmen.

Aufgabe 2. (5*+5*)(Alternierende Gruppe vom Grad n) Wir betrachten in dieser Aufgabe die alternierende Gruppe A_n. Sie ist per Definition und Aufgabe 1.2. der Kern der Signumfunktion, und damit eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$.

1.* Zeigen Sie, dass A_n durch die Menge der 3-Zykel von $\mathfrak{S}_n$ erzeugt wird.

2.* Zeigen Sie, dass $\mathfrak{S}_n$ genau eine Untergruppe vom Index 2 hat.

Aufgabe 3. (3*+2*)(Normalteiler von direkten Produkten von Gruppen)

1.* Es seien G und G' Gruppen und $H \leq G$ und $H' \leq G'$ Untergruppen von G bzw. G'. Zeigen Sie, dass $H \times H'$ genau dann ein Normalteiler von $G \times G'$ ist, wenn H ein Normalteiler von G und H' ein Normalteiler von G' ist.

2.* Finden Sie ein Beispiel für zwei Gruppen G und G', so dass $G \times G'$ einen Normalteiler N besitzt, so dass für kein Paar (H, H'), bestehend aus $H \leq G$ und $H' \leq G'$, die Menge N mit $H \times H'$ übereinstimmt.

*-Aufgaben sind Bonusaufgaben.