Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik
Serie 6

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **Mittwoch den 07.06.2017 vor** dem Beginn der Vorlesung. **Der vorangehende Montag ist Pfingstmontag!**

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)**.** (Homomorphismen)

1. Geben Sie alle Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ nach $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ an.
2. Es seien m und n teilerfremde ganze Zahlen ungleich 0. Zeigen Sie, dass es nur einen Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ nach $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)$ gibt.
3. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$ gruppenisomorph zu $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})\setminus\{[0]_7\},\cdot)$ ist. Sie können dabei verwenden, dass $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})\setminus\{[0]_7\},\cdot)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2 (5+5+5* Punkte)**.** (Normalteiler) Es seien eine Gruppe G und eine Untergruppe H von G gegeben.

1. Wir nehmen an, dass H in G den Index 2 hat.
   (a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.
   (b) Finden Sie einen Gruppenepimorphismus von G nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. Zeigen Sie, dass die Menge
$$\{N\subseteq H|N\trianglelefteq G\}$$
bezüglich „$\subseteq$“ ein größtes Element besitzt.

Aufgabe 3 (4+2+4 Punkte)**.** (Dritter Isomorphiesatz) Es seien eine Gruppe G, eine Untergruppe H und ein Normalteiler N von G gegeben.

1. Zeigen Sie, dass $NH=\{nh|n\in N\wedge h\in H\}$ eine Untergruppe von G ist, und dass $NH=HN$ gilt.
2. Zeigen Sie $(H\cap N)\trianglelefteq H$ und $N\trianglelefteq HN$.
3. Zeigen Sie, dass $H/(H\cap N)$ gruppenisomorph zu HN/N ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 ((2+2+2)+4 Punkte)**.** (Lamplighter-Gruppe)

1. Es sei $((M_i, *_i))_{i\in I}$ eine Familie von Monoiden. Wir betrachten dessen direktes Produkt $\prod_{i\in I} M_i = (\bigtimes_{i\in I} M_i, *)$. Es sei e_i das neutrale Element von M_i.
   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{(x_i)_{i\in I}\middle|\ x_i \in M_i,\ |\{i \in I | x_i \neq e_i\}| < \infty\right\}$$
   abgeschlossen unter $*$ ist, d.h. $*((\bigoplus_{i\in I} M_i) \times (\bigoplus_{i\in I} M_i)) \subseteq \bigoplus_{i\in I} M_i$.
   (b) Folgern Sie, dass $\bigoplus_{i\in I} M_i$ mit der Einschränkung von $*$ einen Monoid bildet. Man nennt $\bigoplus_{i\in I} M_i$ die *äußere direkte Summe* von $((M_i, *_i))_{i\in I}$.
   (c) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i\in I} M_i$ eine Untergruppe von $\prod_{i\in I} M_i$ ist, wenn jedes $(M_i, *_i)$ eine Gruppe ist.

2. Wir betrachten die folgende Menge $G := \mathbb{Z} \times (\bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass G mit der Struktur
   $$(z, (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) * (z', (a'_i)_{i\in\mathbb{Z}}) := (z + z', (a_{i+z'} + a'_i)_{i\in\mathbb{Z}})$$
   eine Gruppe bildet, und zeigen Sie, dass $(1, ([0]_2)_{i\in\mathbb{Z}})$ und $(0, (l_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ mit
   $$l_i := \begin{cases} [1]_2 & ,\ i = 0 \\ [0]_2 & ,\ i \neq 0 \end{cases}$$
   die Gruppe erzeugen.