

Zusatz: Das Auswahlaxiom

In S.2.3. hatten wir die Widerspruchsmethode mit Unendlichem Absieg.

Man hat ein gauzzahliges Problem gegeben, (z.B. $x^3 + y^3 = z^3 \wedge x, y, z \neq 0$.)

Es sei $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ die Menge der Lösungen des Problems. Wir betrachten $h(\underline{z}) := |z_1| + |z_2| + |z_3|$

Angenommen man kann zeigen, dass gilt

$$(*) \quad \forall \underline{z} \in L : \quad \emptyset \neq L \cap \{ \underline{\tilde{z}} \in \mathbb{Z}^3 \mid h(\underline{\tilde{z}}) < h(\underline{z}) \}$$

Beh: Dann ist L leer.

Beweis: Annahme $L \neq \emptyset \Rightarrow M := h(L) \neq \emptyset$.

Wähle $m_0 \in M$. Wir brauchen $f: M_0 \rightarrow M_0$ nicht ordnungstreu behauptend.

1) Für $m \in M$ gilt: $M \cap M^{<m} \neq \emptyset$.

Bew: $m \in M \Rightarrow \exists \underline{z} \in L: h(\underline{z}) = m$.

2) $\exists \underline{\tilde{z}} \in L: h(\underline{\tilde{z}}) < h(\underline{z})$. Also

$$h(\underline{\tilde{z}}) \in M \cap M^{<m}. \quad \square$$

Wählen Sie $\gamma: M \rightarrow M$, o.d. $g(\gamma n) < n$

(Aber warum geht das?)

Rekursionsatz (S. 2.2.) $\Rightarrow \exists f: \mathbb{N}_0 \rightarrow M: f(0) = m_0$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: f(n+1) = g(f(n))$$

Dann gilt $f(n+1) = g(f(n)) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Mit vollst. Induktion zeigt man $f(n+1) < f(n) \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu S. 2.3.1.

□

Def 2.4: Es sei M eine Menge.

$$\text{Auswahl}(M) := \left\{ \bigvee_{G: I \rightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}} \exists f: I \rightarrow M \forall i \in I: f(i) \in G(i) \right\}$$

Wir können obiges g aufgrund des folg. Satzes ~~aus~~ finden

Satz 2.5: Für jede Teilmenge M von $\mathbb{N}_0$ gilt $\text{Auswahl}(M)$.

Beweis: Für $M = \emptyset$ ist nichts zu zeigen.

Es sei $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \setminus \{\emptyset\}$, und es sei

$G: I \rightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ gegeben.

Definiere $f(i) := \min G(i)$. (Satz 1.5) □

Auswahlaxiom (A₉) Für alle Mengen M gilt Auswahl(M).

Dazu äquivalente Axiome

Def 26: Es sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g: N \rightarrow M$ heißt:

- Rechtsinverse von f , falls $f \circ g = \text{id}_N$ ist.
- Linksinverse von f , falls $g \circ f = \text{id}_M$ ist.

Axiom von der Existenz von Rechtsinversen (A_{ER}):

$\forall f: M \rightarrow N$ surjektiv: f besitzt eine Rechtsinverse.

Def 27: Es sei $(M, \leq)$ geordnet. Wir nennen eine total geordnete Menge auch Kette.

Es seien $N \subseteq M$ und $x \in M$.

1) x heißt obere Schranke von N , falls

$$\forall y \in N: y \leq x.$$

Wenn x ein kleinstes Element unter allen oberen Schranken von N ist, so bezeichnen wir

$$x = \sup N.$$

Analog untere Schranke von N und $\inf(N)$.

2) x heißt maximales Element von M , falls kein Element von M größer ist.

3) y heißt minimales Element von M , falls kein Element von M kleiner ist.

4) $(M, \leq)$ heißt induktiv geordnet, falls $M \neq \emptyset$ ist und jede Kette $N \subseteq M$ in M eine obere Schranke besitzt.

Axiom (Zornsches Lemma) (AZL) :

Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.

Satz 2.8: $(AC) \Leftrightarrow (AER) \Leftrightarrow (AZL)$.

Beweis: $(AC) \Rightarrow (AER)$: $f: M \rightarrow N$.

$$\Rightarrow \forall y \in N : f^{-1}(\{y\}) = \{x \in M \mid f(x) = y\} \neq \emptyset$$

$$(AC) \Rightarrow \exists g: N \rightarrow M : \forall y \in N : g(y) \in f^{-1}(\{y\})$$

$$\Rightarrow f \circ g = \text{id}_N$$

$(AER) \Rightarrow (AC)$: (Übungsaufgabe)

(AZL) $\Rightarrow$ (AC): Es sei $G: I \rightarrow \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ gegeben. $\mathcal{M} = \{ (\mathcal{I}, f) \mid \mathcal{I} \subseteq I, f: \mathcal{I} \rightarrow M, \forall i \in \mathcal{I}: f(i) \in G(i) \}$

Definieren: $(\mathcal{I}_1, f_1) \leq (\mathcal{I}_2, f_2) \Leftrightarrow \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \wedge f|_{\mathcal{I}_1} = f_1$.

Es sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ eine Kette. Definieren $\mathcal{I}_0 = \bigcup \mathcal{I}$ und $f_0: \mathcal{I}_0 \rightarrow M$ durch $f_0|_{\mathcal{I}} = f$ für alle $(\mathcal{I}, f) \in \mathcal{K}$.

für alle $(\mathcal{I}, f) \in \mathcal{K}$. f_0 ist wohldefiniert. (ÜA)
 $(\mathcal{I}_0, f_0)$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ per Definition.

$\mathcal{K}$ beliebig $\Rightarrow \mathcal{M}$ ist induktiv geordnet

(AZL) $\Rightarrow \exists (\mathcal{I}, \hat{f}) \in \mathcal{M} : (\mathcal{I}, \hat{f})$ maximales Element

Annahme $\mathcal{I} \subsetneq I \Rightarrow \exists i_0 \in I \setminus \mathcal{I}$. Wähle $x_0 \in G(i_0)$.
Definieren $\hat{\mathcal{I}}(i_0) := x_0$ und $\hat{f}|_{\mathcal{I}} = \hat{f}$.

$\Rightarrow (\mathcal{I}, \hat{f}) \neq (\hat{\mathcal{I}}, \hat{f}) \not\leq$ zur Maximalität.

Also $I = \mathcal{I}$. Damit ist (AC) gezeigt.

(AC) $\Rightarrow$ (AZL) ohne Beweis

□