Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik Serie 4

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **Montag den 22.05.2017** vor dem Beginn der Vorlesung

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte). (Äquivalenzrelationen)

1. Es sei R die folgende binäre Relation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$(z_1, z_2)R(z'_1, z'_2) \Leftrightarrow_{Def} ((z_1 z'_1 > 0 \wedge z_2 z'_2 > 0) \vee (z_1 = z'_1 \wedge z_2 = z'_2)).$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Berechnen Sie alle Äquivalenzklassen von R und skizzieren Sie diese im Koordinatensystem der euklidischen Ebene.

2. Wir nennen zwei Äquivalenzrelationen (M, R_1) und (M, R_2) *kommensurabel*, falls jedes Element von $M/R_1 \cup M/R_2$ nur endlich viele Elemente aus $M/R_1 \cup M/R_2$ nichtleer schneidet. Zeigen Sie, dass Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Äquivalenzrelationen von M ist, und finden Sie eine zu R , aus Aufgabeteil 1, kommensurable Äquivalenzrelation S , so dass jede Äquivalenzklasse von S genau zwei Elemente aus $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R$ nichtleer schneidet.

Aufgabe 2 (2+3+5 Punkte). (Restklassen) Wir definieren auf $\mathbb{Z}/\equiv_m$ wie folgt eine Addition und eine Multiplikation:

$$[a]_m + [b]_m := [a + b]_m, \quad [a]_m \cdot [b]_m := [ab]_m.$$

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\cdot : \mathbb{Z}/\equiv_m \times \mathbb{Z}/\equiv_m \rightarrow \mathbb{Z}/\equiv_m$ wohldefiniert ist.
2. Es sei n eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass $n^3 + 4$ nicht die Summe von zwei dritten Potenzen ganzer Zahlen ist, d.h. dass nicht zwei ganze Zahlen z_1, z_2 existieren, so dass $z_1^3 + z_2^3 = n^3 + 4$ ist. Hinweis: Rechnen Sie mod m für einen geeigneten Modul m . Der Exponent könnte beim Finden des Moduls behilflich sein.
3. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen in $[3]_4$ gibt. Hinweis: Finden Sie einen Beweis, ähnlich zum Beweis vom Satz von Euklid (Satz 29), und rechnen Sie modulo 4.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte). (Chinesischer Restsatz) Berechnen Sie alle Lösungen für die folgenden Kongruenzsysteme mit nachvollziehbarem Lösungsweg und Probe.

1. $X \equiv_8 2$, $X \equiv_{21} 16$, $X \equiv_{22} 14$, $X \equiv_{12} 10$.
2. $3X + 7 \equiv_{17} 0$, $5X - 4 \equiv_{11} 0$, $7X + 2 \equiv_9 6$.

Aufgabe 4 (5+5+5*). (Diophantische Gleichungen) Es seien $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen, und $z = \epsilon \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(z)}$ die nach der Vorlesung und Übung bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutige Primfaktorzerlegung von $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ wobei ϵ ein Element aus $\{1, -1\}$ ist. Wir setzen $\nu_p(0) := \infty$ für jede Primzahl p .

1. Zeigen Sie, dass $\nu_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ für alle ganzen Zahlen z_1 und z_2 das Folgende erfüllt:

- $\nu_p(z_1 + z_2) \geq \min\{\nu_p(z_1), \nu_p(z_2)\}$ und
- $\nu_p(z_1 + z_2) = \min\{\nu_p(z_1), \nu_p(z_2)\}$, falls $\nu_p(z_1) \neq \nu_p(z_2)$,

wobei wir $n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ setzen.

2. Zeigen Sie, dass für $n \in \{0, 1, 2\}$ die Gleichung $X^3 - Y^3 = XY^n$ keine ganzzahlige Lösung (x, y) mit $y \neq 0$ besitzt. Hierbei dürfen Sie den großen Satz von Fermat verwenden.

3.* Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen von $X^3 - Y^3 = XY^3$.