Übungsaufgaben zur Vorlesung
p-adische Darstellungstheorie
Serie 1

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **28.04.2017** in der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte) *Es seien a ein Element von $\mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ und p eine Primzahl ungleich 2. Zeigen Sie, dass $x^2 = a$ genau dann eine Lösung in $\mathbb{Q}_p$ hat, wenn $z := \nu_p(a)$ gerade ist und die Restklasse von $p^{-z}a$ modulo $p\mathbb{Z}_p$ ein Quadrat ist.*

Aufgabe 2 (2+3)

1. *Geben Sie eine quadratische diophantische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten an, die für alle Primzahlen p eine Lösung modulo p besitzt, aber nicht im Bereich der rationalen Zahlen lösbar ist. Hinweis: 4-Quadrate-Satz.*

2. *Finden Sie eine quadratische diophantische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, die sowohl eine reelle Lösung als auch für jede Primzahl p eine Lösung modulo p besitzt, die aber keine ganzzahlige Lösung besitzt.*

Aufgabe 3 (3+3 Punkte) *Es sei $(K, |.|)$ ein Körper mit einer Betragsabbildung $|.| : K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, d.h. $|.|$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:*

- $|x| = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$,
- $|xy| = |x||y|$, *und*
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

1. *Zeigen Sie, dass $|.|$ genau dann nicht-archimedisch ist, wenn für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $|n| \leq 1$ gilt.*

2. *Zeigen Sie, dass $|.|$ nicht-archimedisch ist, wenn er diskret ist, d.h. wenn $|K^\times|$ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^{>0}$ ist.*