

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik Serie 3

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **10.05.2017** vor dem Beginn der Vorlesung

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte). (Mersennesche Primzahlen) Gegeben sei eine natürliche Zahl n .

1. Beweisen Sie, dass n eine Primzahl sein muss, wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist.
2. Ist für jede Primzahl p die Zahl $2^p - 1$ eine Primzahl? Beweisen Sie ihre Antwort.

Eine Primzahl der Form $2^n - 1$ heißt Mersennesche Primzahl.

Aufgabe 2 (4+6+5* Punkte). (ggT, kgV und Bézout)

1. Bestimmen Sie Bézout-Koeffizienten für $(2415, 3910, 4186)$, d.h. finden Sie ganze Zahlen a, b, c so dass $a2415 + b3910 + c4186 = \text{ggT}(2415, 3910, 4186)$ gilt, und **geben Sie eine nachvollziehbare schriftliche Überprüfung Ihres Ergebnisses an**. Hinweis: Führen Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus zweimal durch.
2. Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache für die folgenden Paare: $(2541^{1001}, 1001^{2541})$, $(2^{16} - 1, 3^{16} - 2^{16})$ und $(7^{180} + 1, 7^{120} - 1)$.
3. Es seien zwei ganze Zahlen a und b Bézout-Koeffizienten für $2^{93} + 1352$ und $3^{27} + 11$. Gibt es eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $aX + bY = 109$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 3 (5+5+5* Punkte). Es seien eine natürliche Zahl n in der Dezimaldarstellung $n = \sum_{i=0}^m a_i 10^i$, $0 \leq a_i < 10$ und $a_m \neq 0$, und eine natürliche Zahl l gegeben. Wir setzen $a_i := 0$ für alle $i > m$. Wir bezeichnen

$$Q_l(n) := \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^{l-1} 10^i a_{jl+i}$$

als die l -Blockquersumme und

$$Q_{l,alt}(n) := \sum_{j=0}^q (-1)^j \sum_{i=0}^{l-1} 10^i a_{jl+i}$$

als die *alternierende l -Blockquersumme* von n , wobei q durch Division mit Rest, $m = ql + r$ mit $0 \leq r < l$, gegeben ist. Bitte wenden.

1. Zeigen Sie, dass n genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme $Q_1(n)$ durch 3 teilbar ist.
2. Für welche Primzahlen p lässt sich die Teilbarkeit von n durch p mittels der alternierenden 3-Blockquersumme $Q_{3,alt}(n)$ bestimmen? Beweisen Sie Ihre Antwort.
- 3.* Gibt es eine Blockquersumme, alternierend oder nicht, mit der man die Teilbarkeit durch 37 bestimmen kann? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n zwei Primzahlen p_1 und p_2 existieren, so dass $p_2 - p_1$ größer als n ist und keine Primzahl p mit $p_1 < p < p_2$ existiert.