

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik Serie 1 Musterlösung

Dr. Daniel Skodlerack

1. Mai 2017

Aufgabe 1 (5+5+5 Punkte). Es seien Elemente n, m und l aus $\mathbb{N}_0$ gegeben. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

1. das zweite Distributivgesetz: $(n + m)l = nl + ml$,
2. das Kommutativgesetz: $nm = mn$ und
3. das Assoziativgesetz: $n(ml) = (nm)l$.

Lösung:

1. Beweis: Wir fixieren Elemente $n, m \in \mathbb{N}_0$ und beweisen für alle $l \in \mathbb{N}_0$ die Aussage:

$$A(l) := „(n + m)l = nl + ml.“.$$

(IA) ($l = 0$): Es gilt $(n + m)0 = 0$ und $n0 + m0 = 0$ nach Definition 7.

(IS) IV: Es gilt $A(l)$. IB: $A(l^*)$ ist wahr.

Bew.: $(n+m)l^* \stackrel{3b)}{=} (n+m)l + (n+m) \stackrel{IV)}{=} (nl+ml) + (n+m) \stackrel{Ass., Kom.}{=} (nl+n) + (ml+m) \stackrel{3b)}{=} nl^* + ml^*$.
q.e.d. Aus Satz 1 folgt nun die Behauptung. q.e.d.

2. Beweis: Vorbereitung: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $1n = n$: $1 * 0 = 0$ und $1n^* = 1n + 1 \stackrel{IV)}{=} n + 1 = n^*$.
Wir beweisen $A(m) := „\forall n \in \mathbb{N}_0 : nm = mn.“$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

(IA) ($m = 0$): Es gilt $n0 = 0$ nach Definition, und $0n = 0$ wurde in der Übung gezeigt.

(IS) ($m \rightarrow m^*$): $nm^* \stackrel{3b)}{=} nm + n \stackrel{IV)}{=} mn + n \stackrel{1.}{=} (m + 1)n = m^*n$, wobei in der vorletzten Gleichung $1n = n$ aus der Vorbereitung verwendet wurde. Aus Satz 1 folgt nun die Behauptung. q.e.d.

3. Beweis: Wir fixieren $n, m \in \mathbb{N}_0$ und zeigen: $A(l) = „(nm)l = n(ml)“$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$.

(IA) ($l = 0$): Es gelten $(nm)0 = 0$ und $n(m0) = n0 = 0$ nach dreimaliger Anwendung von Definition 7.

(IS) ($l \rightarrow l^*$): $(nm)l^* \stackrel{Def.7)}{=} (nm)l + nm \stackrel{IV)}{=} n(ml) + nm \stackrel{2.}{=} (ml)n + mn \stackrel{1.}{=} (ml + m)n \stackrel{2.}{=} n(ml + m) \stackrel{Def.7)}{=} n(ml^*)$. Aus Satz 1 folgt nun die Behauptung. q.e.d.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte). In der Vorlesung wurde die Addition auf $\mathbb{N}_0$ induktiv definiert, ohne dass bewiesen wurde, dass das überhaupt geht. Dazu ist diese Aufgabe da.

1. Es sei n ein Element von $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass es genau eine Teilmenge T_n von $\mathbb{N}_0$ gibt, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $n \in T_n$,
- $(m^* \in T_n \Rightarrow m \in T_n)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, und
- $n^* \notin T_n$.

Hinweis: Betrachten Sie die Aussage

$A(n)$ = „Es gibt genau eine Teilmenge T_n von $\mathbb{N}_0$, die die obigen drei Punkte erfüllt.“, und beweisen Sie die Richtigkeit von $A(n)$ mit vollständiger Induktion.

2. (Dedekindscher Rekursionssatz) Es seien eine Menge M , eine Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \times M \rightarrow M$ und ein Element $a \in M$ gegeben. Zeigen Sie, dass genau eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$ existiert, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- $f(0) = a$ und
- $f(n^*) = g(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Beweisen Sie $A(n)$ = „Es gibt genau eine Abbildung $f_n : T_n \rightarrow M$ mit $f_n(0) = a$ und $f_n(m^*) = g(m, f_n(m))$ für alle $m^* \in T_n$.“ mit vollständiger Induktion. Definieren Sie f mit Hilfe von f_n .

Lösung:

1. Wir bezeichnen die drei Eigenschaften aus der Aufgabenstellung 2.1 mit $E(n) = (E_1(n), E_2(n), E_3(n))$. Wir beweisen die Folge von Aussagen:

$A(n) :=$ „Es gibt genau eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ die $E(n)$ erfüllt.“

mit vollständiger Induktion.

Beweis:

(IA) ($n = 0$): Die Menge $S := \{0\}$ erfüllt $E(0)$, wobei $E_2(0)$ aus (P3) folgt. Es sei S' eine weitere Menge, die $E(0)$ erfüllt. Dann ist S eine Teilmenge von S' nach $E_1(0)$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ m^* kein Element von S' ist.

Bew.: 0^* ist kein Element von S' nach $E_3(0)$. ($m \rightarrow m^*$): Wäre $(m^*)^*$ ein Element von S' , so wäre auch $m^* \in S'$ nach $E_2(0)$ und somit hätte man einen Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. q.e.d.

Aus Satz 2 folgt nun, dass S' mit S übereinstimmt.

(IS) IV: Es gilt $A(n)$. IB: Es gilt $A(n^*)$.

Bew.: Nach $A(n)$ gibt es eine Menge T , die $E(n)$ erfüllt. Wir setzen $S := T \cup \{n^*\}$. Dann erfüllt S automatisch $E_1(n^*)$. Wir zeigen, dass S auch $E_2(n^*)$ und $E_3(n^*)$ erfüllt. Zuerst $E_2(n^*)$: Es sei m^* ein Element von S . Wir müssen zeigen, dass m ein Element von S ist. Im Falle $m = n$ folgt das aus $E_1(n)$ für T . Wenn $m \neq n$, dann ist nach (P4) $n^* \neq m^*$, also $m^* \in T$. Aus $E_2(n)$ folgt damit, dass m ein Element von $T \subseteq S$ ist. Nun $E_3(n^*)$: Wäre $(n^*)^*$ ein Element von S , so wäre es ein Element von T , da $(n^*)^* \neq n^*$ laut Übung. Also wäre n^* ein Element von T nach $E_2(n)$. Ein Widerspruch zu $E_3(n)$.

Also erfüllt S die Eigenschaften $E(n^*)$. Es sei S' eine weitere Menge, die $E(n^*)$ erfüllt. Dann erfüllt $S' \setminus \{n^*\}$ die Eigenschaften $E(n)$ und somit gilt nach IV $S' \setminus \{n^*\} = T$. Also folgt $S' = S$. q.e.d.

Aus Satz 1 folgt nun die Behauptung q.e.d.

Anmerkung: Wir bezeichnen die Menge, die $E(n)$ erfüllt, mit T_n . Es folgt $T_{n^*} = T_n \cup \{n^*\}$, da beide Seiten $E(n^*)$ erfüllen und von solchen Mengen nur eine existiert. Des Weiteren zeigt eine leichte Induktion $0 \in T_n$.

2. Beweis: Der Beweis benötigt zwei Teile:

Teil 1: Wir betrachten die beiden Anforderungen $F(n)$ an eine Abbildung f :

- $F_1(n)$: $f(0) = a$ und
- $F_2(n)$: $f(m^*) = g(m, f(m))$ für alle $m \in T_n$.

Wir zeigen $A(n) :=$ „Es gibt genau eine Abbildung von T_n nach M , die $F(n)$ erfüllt.“.

Bew.:

(IA) ($n = 0$): Wir wählen die Abbildung die 0 auf a abbildet. Da T_0 nur ein Element hat, folgt aus F1(0), dass keine weitere Abbildung auf T_0 existiert, die F(0) erfüllt.

(IS) ($n \rightarrow n^*$): Es sei $f : T_n \rightarrow M$ eine Abbildung, die F(n) erfüllt, und wir definieren $f' : T_{n^*} \rightarrow M$ durch

$$f'|_{T_n} := f, f'(n^*) := g(n, f(n)).$$

Dann erfüllt f' die Eigenschaften F(n^*), da f F(n) erfüllt und

$$f'(n^*) = g(n, f(n)) = g(n, f'(n))$$

gilt. Es sei f'' eine weitere Abbildung, die F(n^*) erfüllt. Dann folgt aus der Eindeutigkeitsaussage der Induktionsvoraussetzung, dass f mit $f''|_{T_n}$ übereinstimmen. Aus F2(n^*) folgt dann $f'' = f'$.

q.e.d.

Teil 2: Wir bezeichnen die Abbildung von T_n nach M , die F(n) erfüllt mit f_n . Wir definieren $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$ via $f(n) := f_n(n)$. Da für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abbildungen $f_{n^*}|_{T_n}$ und f_n die Eigenschaften F(n) erfüllen, folgt aus der Eindeutigkeit, dass $f_{n^*}|_{T_n}$ und f_n übereinstimmen.

Also gelten

$$f(n^*) \stackrel{Def}{=} f_{n^*}(n^*) \stackrel{F2(n^*)}{=} g(n, f_{n^*}(n)) \stackrel{f_{n^*}(n) = f_n(n)}{=} g(n, f_n(n)) \stackrel{Def}{=} g(n, f(n)),$$

und $f(0) = f_0(0) = a$. Damit ist die Existenz bewiesen. Eine weitere Abbildung f' , die die beiden Punkte aus 2.2 erfüllt, stimmt nach Teil 1 auf jedem T_n mit f überein. Aus $\bigcup_n T_n = \mathbb{N}_0$ folgt $f = f'$. q.e.d.

Aufgabe 3 (5+5+5 Punkte). Es sei n ein Element aus $\mathbb{N}_0$.

1. Gegeben seien Elemente a_i von $\mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie $\sum_{i=0}^n a_i$ induktiv nach Aufgabe 2.2. Geben Sie dabei g und a an.
2. Zeigen Sie $6 \sum_{i=0}^n i^2 = (2n+1)(n+1)n$.
3. Zeigen Sie $4 \sum_{i=0}^n i^3 = ((n+1)n)^2$.

Lösung: Die Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze werden ohne weitere Erwähnung verwendet, ausser eine Erwähnung führt zum besseren Verständnis einer Umformung.

1. Wir setzen $a := a_0$ und definieren $g : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch $g(s, t) := t + a_{s^*}$. Der dedekindsche Rekursionssatz liefert eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ zum Paar (a, g) . Wir definieren $\sum_{i=0}^n a_i := f(n)$.
2. Beweis:

(IA) ($n = 0$): $6 \sum_{i=0}^0 i^2 = 6 * 0 = 0$. und $(2 * 0 + 1)(0 + 1)0 = 1 * 1 * 0 = 0$.

(IS) ($n \rightarrow n^*$): $6 \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = 6 \sum_{i=0}^n i^2 + 6(n+1)^2 \stackrel{IV}{=} (2n+1)(n+1)n + 6(n+1)^2 \stackrel{Distr.}{=} (2n^2+7n+6)(n+1) = (2n+3)(n+2)(n+1)$. q.e.d.

3. Beweis:

(IA) ($n = 0$): Wie in Aufgabe 3.2

(IS) ($n \rightarrow n^*$): $4 \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = 4 \sum_{i=0}^n i^3 + 4(n+1)^3 = ((n+1)n)^2 + 4(n+1)^3 \stackrel{Distr.}{=} (n+1)^2(n^2+4n+1) = (n+1)^2(n+2)^2$. q.e.d.