# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik
# Serie 2

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **03.05.2017 vor** dem Beginn der Vorlesung

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

**Aufgabe 1** (5+5 Punkte)**.** Es seien $n, m$ Elemente aus $\mathbb{N}_0$ und $p$ ein Element aus $\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Aus $n \leq m \leq n^*$ folgt $m \in \{n, n^*\}$. Hinweis: Eine Induktion ist hier NICHT notwendig!
2. Die Ungleichung $pn < pm$ ist äquivalent zu $n < m$. Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Rückrichtung.

**Aufgabe 2** (5+5 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation ($a|b \;\Leftrightarrow \exists : c \in \mathbb{Z} : b = ac$) auf der Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$) eine Ordnungsrelation ist. Ist diese auch total? Beweisen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3** (5+5 Punkte)**.** (Widerspruchsmethode des unendlichen Abstiegs)

1. Zeigen Sie, dass keine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ existiert, die *streng ordnungsumkehrend* ist, d.h. die für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$ die Ungleichung $f(n) > f(m)$ erfüllt.
2. Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $0 = X^3 + 7Y^3 + 49Z^3$.

**Aufgabe 4** (5+5* Punkte)**.** Wir bezeichnen zwei nichtleere Mengen $M$ und $N$ als *bijektiv äquivalent*, falls eine Bijektion von $M$ nach $N$ existiert.

1\. Es sei $T$ eine nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl $m$ existiert, so dass $T$ zu $\mathbb{N}^{\leq m}$ bijektiv äquivalent ist. Hinweis: Schauen Sie auf die Hinweise zu Satz 13.

2.* Es seien $n$ und $m$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass es genau dann eine Injektion von $\mathbb{N}^{\leq m}$ nach $\mathbb{N}^{\leq n}$ gibt, wenn $m \leq n$ gilt.

$*$-Punkte sind Bonuspunkte.