

Übungsaufgaben zur Vorlesung Algebra und Zahlentheorie und ihre Didaktik Serie 1

Dr. Daniel Skodlerack

Abgabe am **26.04.2017** vor dem Beginn der Vorlesung

Bitte beachten Sie Folgendes:

1. Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem neuen Blatt.
2. Beschriften Sie **jedes** abzugebende Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe.
3. Begründen Sie Ihre Lösungen, wenn nicht anders lautend, **nur** mit der Vorlesung, der Übung und vorhergehender Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (5+5+5 Punkte) Es seien Elemente n, m und l aus $\mathbb{N}_0$ gegeben. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

1. das zweite Distributivgesetz: $(n + m)l = nl + ml$,
2. das Kommutativgesetz: $nm = mn$ und
3. das Assoziativgesetz: $n(ml) = (nm)l$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte) In der Vorlesung wurde die Addition auf $\mathbb{N}_0$ induktiv definiert, ohne dass bewiesen wurde, dass das überhaupt geht. Dazu ist diese Aufgabe da.

1. Es sei n ein Element von $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass es genau eine Teilmenge T_n von $\mathbb{N}_0$ gibt, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - $n \in T_n$,
 - $(m^* \in T_n \Rightarrow m \in T_n)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, und
 - $n^* \notin T_n$.

Hinweis: Betrachten Sie die Aussage

$A(n)$ = „Es gibt genau eine Teilmenge T_n von $\mathbb{N}_0$, die die obigen drei Punkte erfüllt.“, und beweisen Sie die Richtigkeit von $A(n)$ mit vollständiger Induktion.

2. (Dedekindscher Rekursionssatz) Es seien eine Menge M , eine Abbildung $g : \mathbb{N}_0 \times M \rightarrow M$ und ein Element $a \in M$ gegeben. Zeigen Sie, dass genau eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$ existiert, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:
 - $f(0) = a$ und
 - $f(n^*) = g(n, f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Beweisen Sie $A(n)$ = „Es gibt genau eine Abbildung $f_n : T_n \rightarrow M$ mit $f_n(0) = a$ und $f_n(m^) = g(m, f_n(m))$ für alle $m^* \in T_n$.“ mit vollständiger Induktion. Definieren Sie f mit Hilfe von f_n .*

Aufgabe 3 (5+5+5 Punkte) Es sei n ein Element aus $\mathbb{N}_0$.

1. Gegeben seien Elemente a_i von $\mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}_0$. Definieren Sie $\sum_{i=0}^n a_i$ induktiv nach Aufgabe 2.2. Geben Sie dabei g und a an.
2. Zeigen Sie $6 \sum_{i=0}^n i^2 = (2n + 1)(n + 1)n$.
3. Zeigen Sie $4 \sum_{i=0}^n i^3 = ((n + 1)n)^2$.